1 Differentialgleichung

1.1 Problemstellung

Gegeben: $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_0 = u_0$
Gesucht: exakte Lösungsfunktion $y(t)$

1.2 Approximation

Gesucht: Approximation u_j des exakten Wertes der Lösungsfunktion $y(t_j)$
Verfahrenfunktion: $\phi(t_j, y, h_j, f)$
Approximation: $u_{j+1} = u_j + h\phi(t_j, y, h, f)$
Approximation mit Schrittweitensteuerung: $u_{j+1} = u_j + h_j\phi(t_j, y, h_j, f)$

1.3 Runge-Kutta-Verfahren

Tableau-Schema:

$$
\begin{array}{c|cccc}
\alpha_1 & \beta_{1,1} & \dots & \beta_{1,m-1} & \beta_{1,m} \\
\alpha_2 & \beta_{2,1} & \dots & \beta_{2,m-1} & \beta_{2,m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\alpha_m & \beta_{m,1} & \dots & \beta_{m,m-1} & \beta_{m,m} \\
\hline
 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{m-1} & \gamma_m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
\text{Stützstellen} & \begin{array}{c} \textit{Gewichte der } k_i \\ \textit{bei Berechnung der } k_i \end{array} \\
\hline
 & \textit{Gewichte der } k_i \textit{ bei Berechnung von } \phi
\end{array}
$$

Auswertung:

$$\phi(t_j, y, h_j, f) = \sum_{i=0}^{m} \gamma_i k_i(t_j, y, h_j, f)$$

$$k_i(t_j, y, h_j, f) = f(t_j + \alpha_i h_j,\ y_j + h_j \sum_{l=1}^{m} \beta_{i,l} k_l(t_j, y, h_j, f))$$

Verhalten:

$$Verfahren\ explizit\ \Leftrightarrow\ \alpha_1 = 0 \bigwedge \forall i : \sum_{j=i}^{m} \beta_{i,j} = 0$$

$$Verfahren\ konsistent\ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$$

$$Verfahren\ mindestens\ der\ Ordnung\ O(h_j^2)\ \Rightarrow\ \sum_{r=1}^{m} \alpha_r = \sum_{r=1}^{m} \gamma_r \sum_{j=1}^{m} \beta_{r,j}$$

größere Stabilitätsgebiete:

$$\forall i, j : \alpha_i \geq 0 \bigwedge \beta_{i,j} \geq 0 \bigwedge \gamma_i \geq 0$$

$$\forall r : \alpha_r = \sum_{j=1}^{m} \beta_{r,j}$$