Definitionen und Faden

$|U| := \sup\{d(x,y) : x, y \in U\}$ ist der *Durchmesser* von U.

$d(E,F) := \inf\{d(x,y) : x \in E, y \in F\}$ ist der *Abstand der Mengen* E und F.

E und F *positiv separiert* $\Leftrightarrow d(E,F) > 0$

ν ist *äußeres Maß* auf X, wenn

$$\nu : P(X) \to [0,\infty]\, mit$$

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. $\nu(A) \leq \nu(A')\, für\, A \subset A'$ (Monotonie)
3. $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$ für alle $A_j \subset X$ (Subadditivität)

z. B.: $\mu : P(x) \to [0,\infty]$, $A \mapsto \{1\, für\, A \neq \emptyset,\, 0\, sonst$

äußeres Maß ν ist *metrisches äußeres Maß* $\Leftrightarrow$ für E und F positiv separiert: $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$

$\longrightarrow$ Lemma 1.4 (Carathéodory[1]'s Lemma)

$E \subset X$ ist ν*-meßbar* $\Leftrightarrow \forall A \subset X : \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(E)$

Bem.: Bezüglich obigem Beispiel μ ist keine Menge meßbar.

Die Mengen, die zu einer σ-Algebra gehören, die durch abgeschlossene Teilmengen von X gebildet wird, heißen *Borel[2]-Mengen*.

$\longrightarrow$ Theorem 1.5

abzählbare Familie von Mengen $\{U_i\}_i$ heißt δ *-Überdeckung von F* $\Leftrightarrow$ $F \subset \bigcup_i U_i \wedge \forall i : 0 < |U_i| \leq \delta$

F_σ *-Menge* ist eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

G_δ *-Menge* ist ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen.

äußeres Maß ν ist *reguläres äußeres Maß* $\Leftrightarrow$ $\forall A : \exists E\, \nu - meßbar : A \subset E \wedge \nu(A) = \nu(E)$

[1]Constantin Carathéodory 1873 - 1950 aus Griechenland
[2]Emile Borel 1871 - 1956 aus Frankreich

Hausdorff[3]-Maß

$E \subset \Re^n; s \geq 0; \delta > 0; \{U_i\}_i \; sei \; \delta$ -Überdeckung von E

$H^s_\delta(E) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\}$ (inf bzgl. δ -Überdeckung)

$H^s(E) := \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(E)$ heißt das *Hausdorff-s-dimensionale äußere Maß* oder *s-dimensionales Hausdorff-Maß* (kurz: *Hausdorff-Maß*)

Bem.:

1. H^s_δ ist äußeres Maß des $\Re^n$
2. H^s ist metrisches äußeres Maß

Die *Hausdorff-Dimension von E* $dim_H E$ *erfüllt:*

1. $H^s(E) = \infty \; für \; 0 \leq s < dim_H E$
2. $H^s(E) = 0 \; für \; dim_H E < s < \infty$

$\longrightarrow$ *Theorem 1.6 a)*

$\longrightarrow$ *Theorem 1.6 b)*

$\longrightarrow$ *Lemma 1.7*

Vitali[4]-Klasse

Eine Menge A von Mengen A_i heißt *semidisjunkt* $\Leftrightarrow$
$A = \bigcup_i \{A_i\} \wedge \forall i \neq j : A_i \not\subset A_j$

$\longrightarrow$ Lemma 1.9

Menge V von Mengen heißt *Vitali-Klasse* für E $\Leftrightarrow$
$\forall x \in E : \forall \delta > 0 : \exists U \in V : x \in U \wedge 0 < |U| \leq \delta$

$\longrightarrow$ Theorem 1.10 (Vitali-Überdeckungssatz)

[3] Felix Hausdorff 1868 - 1942 aus Deutschland
[4] Giuseppe Vitali 1875 - 1932 aus Italien

Lebesgue[5]-Maß

$C := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \Re^n$ heißt *Koordinatenblock.*

$V(C) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ heißt *Volumen des Koorndinatenblocks C.*

$L^n(E) := \inf \sum_i V(C_i)$ heißt *n-dimensionales Lebesgue-Maß* (kurz: *Lebesgue-Maß*, wobei $\{C_i\}_i$ Überdeckung mit Koordinatenblöcken von E ist,

Bem.:

1. L^n ist ein Volumen.
2. $L^n(C) = V(C)$ für C Koordinatenblock
3. L^n ist Maß
4. i. B.: L^n ist metrisches äußeres Maß im $\Re^n$

$\longrightarrow$ Theorem 1.11

$\longrightarrow$ Theorem 1.12

$\longrightarrow$ Theorem 1.13

[5] Henri Lebesgue 1875 - 1941 aus Frankreich