Blatt Weihnachten

Knobelaufgabe Er musste wieder einmal früh aufstehen. Es war in seinem Geschäft nicht gut, wenn man zu spät kam. Die Rentiere wollten heute auch nicht wie sonst. Die Milchstraße war mal wieder völlig überfüllt. Er hatte so ein Gefühl, dass heute kein guter Tag werden würde. Der Erzengel grinste auch schon recht vielsagend...
„Da bist Du ja, Weihnachtsmann! Hast Du wieder verschlafen? Hier ist das Weihnachstsgeschenk für den Bauer Huber. Er bekommt 100 Tiere zu Weihnachten. Denke bitte auch daran, dass Du ihm Tiere im Wert von genau 100 Euro bringst.“
„Na klasse ... Mit welchem Wert wird denn jedes Tier gehandelt?“
„Also“, sagte der Erzengel, „eine Kuh hat einen Wert von 10 Euro, ein Schwein von 3 Euro und ein Esel von 50 Cent. Nimm bitte 100 Tiere mit, wenigstens eines von jeder Sorte.“Husch, weg war er.
„Das bedeutet viel Arbeit“, dachte der Weihnachtsmann, „diese ganze Aufladerei! Na ja, 100 Tiere ist wohl doch zu schaffen. Als erstes knöpfe ich mir die Kühe vor. Aber ... Oh nein! ERZENGEL!!!
Wie viele von jeder Art muss ich denn mitnehmen?“

Blatt Weihnachten

Knobelaufgabe Er musste wieder einmal früh aufstehen. Es war in seinem Geschäft nicht gut, wenn man zu spät kam. Die Rentiere wollten heute auch nicht wie sonst. Die Milchstraße war mal wieder völlig überfüllt. Er hatte so ein Gefühl, dass heute kein guter Tag werden würde. Der Erzengel grinste auch schon recht vielsagend...
„Da bist Du ja, Weihnachtsmann! Hast Du wieder verschlafen? Hier ist das Weihnachstsgeschenk für den Bauer Huber. Er bekommt 100 Tiere zu Weihnachten. Denke bitte auch daran, dass Du ihm Tiere im Wert von genau 100 Euro bringst."
„Na klasse ... Mit welchem Wert wird denn jedes Tier gehandelt?"
„Also", sagte der Erzengel, „eine Kuh hat einen Wert von 10 Euro, ein Schwein von 3 Euro und ein Esel von 50 Cent. Nimm bitte 100 Tiere mit, wenigstens eines von jeder Sorte."Husch, weg war er.
„Das bedeutet viel Arbeit", dachte der Weihnachtsmann, „diese ganze Aufladerei! Na ja, 100 Tiere ist wohl doch zu schaffen. Als erstes knöpfe ich mir die Kühe vor. Aber ... Oh nein! ERZENGEL!!!
Wie viele von jeder Art muss ich denn mitnehmen?"

Lösungsvorschlag:

Tier	**Preis in EUR pro Tier**
Kuh	10
Schwein	3
Esel	$\frac{1}{2}$

Es sollen 100 Tiere sein; x bezeichne die Anzahl der Kühe, y bezeichne die Anzahl der Schweine und z bezeichne die Anzahl der Esel.

(1) $x + y + z = 100$

Wobei natürlich nur ganze Tiere in Frage kommen.

(2) $x, y, z \in \mathbb{N}$

Der Wert aller Tiere soll genau 100 Euro betragen.

(3) $10 \cdot x + 3 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot z = 100$

Möglichkeit 1 (Optimierung)

Wenn man von einer Tiersorte 100 Stück nimmt, dann kann man von den anderen Tiersorten keine mehr nehmen. Daher ergeben sich folgende weitere Einschränkungen:

$$\begin{aligned} x &\leq 98 \\ y &\leq 98 \\ z &\leq 98 \end{aligned} \tag{4}$$

Auf Grund der Preise für die einzelnen Tiersorten können noch schärfere Einschränkungen für x und y vorgenommen werden:

$$x \leq \frac{100}{10} = 10 \tag{5}$$

$$y \leq \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \tag{6}$$

Auflösen der Gleichung (1) nach x liefert:

$$x = 100 - y - z \tag{7}$$

Dies kann in die Gleichung (3) als x eingesetzt werden:

$$10 \cdot (100 - y - z) + 3y + \frac{1}{2}z = 100$$

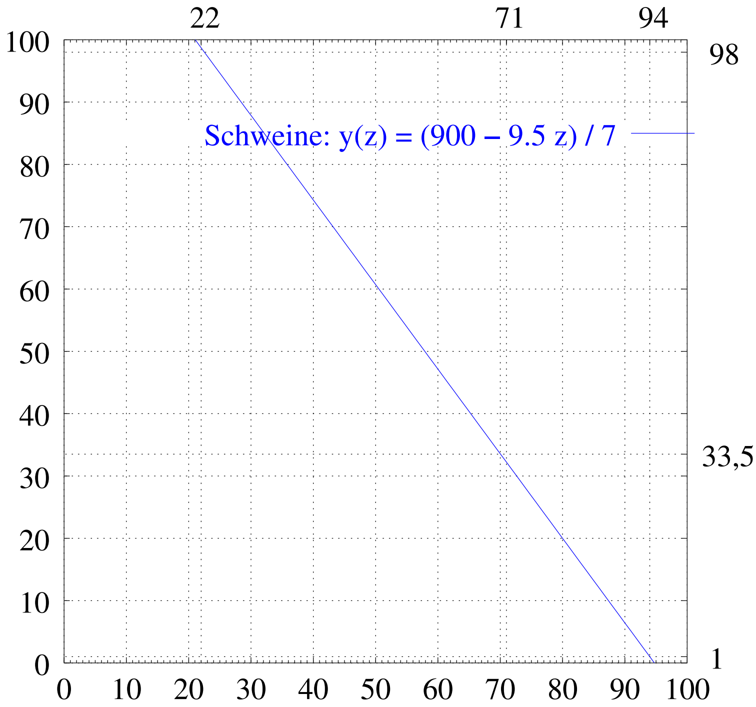
Und nun zusammen gefasst:

$$7y + 9\frac{1}{2}z = 900 \tag{8}$$

Diese Gleichung (8) stellt eine Gerade dar, wenn man beispielsweise nach y auflöst:

$$y = \frac{900 - 9\frac{1}{2}z}{7} \tag{9}$$

In der folgenden Grafik ist diese Gerade aus Gleichung (9) eingezeichnet und alle bisher bekannten Einschränkungen – im Besonderen auch die Ungleichung (6).



Daher müssen also mindestens 71 und es dürfen maximal 94 Esel sein. Dies läßt sich nicht nur ablesen, sondern auch berechnen. Indem man die Gleichung (9) in die Ungleichungen (6) einsetzt erhält man:

$$\begin{aligned}
y &\leq 33\frac{1}{3} \\
\frac{900 - 9\frac{1}{2}z}{7} &\leq 33\frac{1}{3} \\
900 - 9\frac{1}{2}z &\leq 33\frac{1}{3} \cdot 7 = 233\frac{1}{3} \\
900 &\leq 233\frac{1}{3} + 9\frac{1}{2}z \\
900 - 233\frac{1}{3} = 666\frac{2}{3} &\leq 9\frac{1}{2}z \\
666\frac{2}{3} : 9\frac{1}{2} = \frac{200}{3} \cdot \frac{2}{19} = 70\frac{10}{57} &\leq z \qquad (10)
\end{aligned}$$

Das heißt also nun, es müssen mehr als $70\frac{10}{57}$ Esel sein und damit war die obige Ablesung mit 71 OK.

Indem man die Gleichung (9) in die Bedingung, daß y eine natürliche Zahl und damit größer oder gleich 1 sein muß, einsetzt erhält man:

$$\begin{aligned} y &\geq 1 \\ \frac{900 - 9\frac{1}{2}z}{7} &\geq 1 \\ 900 - 9\frac{1}{2}z &\geq 1 \cdot 7 = 7 \\ 900 &\geq 7 + 9\frac{1}{2}z \\ 900 - 7 = 893 &\geq 9\frac{1}{2}z \\ \text{(11)} \quad \frac{893}{9\frac{1}{2}} = \frac{893 \cdot 2}{19} = 94 &\geq z \end{aligned}$$

Es dürfen also maximal 94 Exel sein; und genau dies haben wir auch aus der Grafik gelesen.

Selbiges kann man nun mit x, der Anzahl der Kühe, machen. Dazu muß in der Gleichung (3) diesmal y eliminiert werden.
Auflösen der Gleichung (1) nach y liefert:

(12) $y = 100 - x - z$

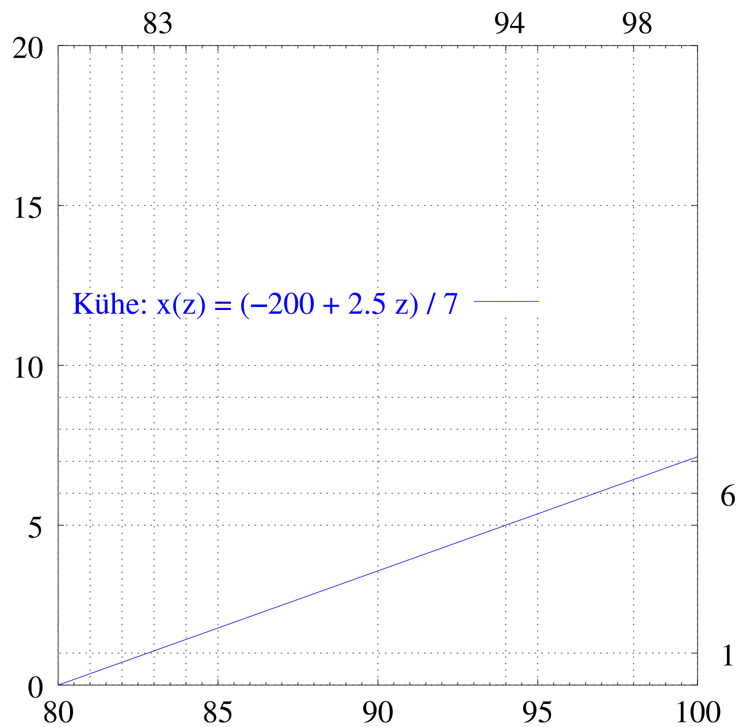
Dies kann in die Gleichung (3) als y eingesetzt werden:

$$10x + 3 \cdot (100 - x - z) + \frac{1}{2}z = 100$$

Und nun zusammen gefasst und nach x aufgelöst:

(13) $x = \dfrac{-200 + 2\frac{1}{2}z}{7}$

Nun kann die Gleichung (13) als Gerade aufgefasst werden und die bisherigen Informationen können auch wieder eingezeichnet werden:



Wieder könnte man Werte für die Anzahl der Esel z aus der Grafik herauslesen, doch dieses Mal wollen wir gleich rechnen. Einsetzen der Gleichung (13) in die Ungleichung (5) liefert:

$$\begin{aligned}
x &\leq 10 \\
\frac{-200 + 2\frac{1}{2}z}{7} &\leq 10 \\
-200 + 2\frac{1}{2}z &\leq 10 \cdot 7 = 70 \\
2\frac{1}{2}z &\leq 70 + 200 = 270 \\
z &\leq 270 : 2\frac{1}{2} = \frac{270 \cdot 2}{5} = 108
\end{aligned}$$

Nun, dies haben wir natürlich schon gewußt – vergleiche Ungleichungen (4) und (11).

Aber was sagt uns die Bedingung, daß x eine nürliche Zahl sein muß?

$$\begin{aligned}
x &\geq 1 \\
\frac{-200 + 2\frac{1}{2}z}{7} &\geq 1 \\
-200 + 2\frac{1}{2}z &\geq 1 \cdot 7 = 7 \\
2\frac{1}{2}z &\geq 7 + 200 = 207 \\
z &\geq 207 : 2\frac{1}{2} = \frac{207 \cdot 2}{5} = 82\frac{4}{5} \qquad (14)
\end{aligned}$$

Damit muß nun z nicht mehr nur größer oder gleich 71 aus Ungleichung (10) sein, sondern sogar größer oder gleich 83.

So wie wir jetzt Einschränkungen für die Anzahl z der Esel gefunden haben, können wir auch Einschränkungen für die Kühe x und Schweine y finden. Löst man Gleichung (8) nach z auf und betrachtet die nun bereits gefundenen Einschränkungen an z, so erhält man:

$$z = \frac{900 - 7y}{9\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
z &\geq 82\frac{4}{5} \\
\frac{900 - 7y}{9\frac{1}{2}} &\geq 82\frac{4}{5} \\
900 - 7y &\geq 82\frac{4}{5} \cdot 9\frac{1}{2} = 786\frac{3}{5} \\
900 &\geq 786\frac{3}{5} + 7y \\
900 - 786\frac{3}{5} = 113\frac{2}{5} &\geq 7y \\
113\frac{2}{5} : 7 = 16\frac{1}{5} &\geq y \qquad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &\leq 94 \\
900 - 7y &\leq 94 \cdot 9\frac{1}{2} = 893 \\
900 &\leq 893 + 7y \\
900 - 893 = 7 &\leq 7y \\
7 : 7 = 1 &\leq y
\end{aligned}$$

Wir haben also jetzt:

(16) $1 \leq x \leq 10$ aus der Bedingung (2) und der Ungleichung (5)

(17) $1 \leq y \leq 16\frac{1}{5}$ aus der Bedingung (2) und der Ungleichung (15)

(18) $82\frac{4}{5} \leq z \leq 94$ aus der Ungleichung (14) und der Ungleichung (11)

Warum haben wir für x noch nichts berechnet?
Als wir die Gleichung (1) nach x zur Gleichung (7) aufgelöst und dies in die Gleichung (3) eingesetzt haben, eliminierten wir damit gleichzeitig x und es blieb die Gleichung (8) übrig. Nur aus dieser Gleichung haben wir die Informationen (16), (17) und (18) gewonnen.

Jetzt lösen wir die Gleichung (1) mal nach y auf:

$$y = 100 - x - z$$

Damit eliminieren wir y in der Gleichung (3) und lösen nach z auf:

$$\begin{aligned}
10x + 3y + \frac{1}{2}z &= 100 \\
10x + 3 \cdot (100 - x - z) + \frac{1}{2}z &= 100 \\
7x + 300 - 2\frac{1}{2}z &= 100 \\
7x + 300 &= 100 + 2\frac{1}{2}z \\
7x + 300 - 100 = 7x + 200 &= 2\frac{1}{2}z \\
(7x + 200) : 2\frac{1}{2} = \frac{14x + 400}{5} &= z \qquad (19)
\end{aligned}$$

Die Einschränkungen an z aus (18) zusammen mit dem soeben gewonnen liefert:

$$\begin{aligned}
82\frac{4}{5} &\leq z \\
82\frac{4}{5} &\leq \frac{14x + 400}{5} \\
82\frac{4}{5} \cdot 5 = 414 &\leq 14x + 400 \\
414 - 400 = 14 &\leq 14x \\
14 : 14 = 1 &\leq x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z &\le 94 \\
\frac{14x + 400}{5} &\le 94 \\
14x + 400 &\le 94 \cdot 5 = 470 \\
14x &\le 470 - 400 = 70 \\
x &\le 70 : 14 = 5
\end{aligned}
$$

Wir haben also jetzt auf Grund unserer bisherigen Rechnungen und der Information, daß nur natürliche Zahlen Sinn machen:

$$
\begin{array}{rl}
(20) \quad 1 & \le x \le \quad 5 \\
1 & \le y \le \quad 16 \\
83 & \le z \le \quad 94
\end{array}
$$

Um auf Gleichung (10) zu kommen, haben wir mit $y \le 33\frac{1}{3}$ angesetzt. Aber jetzt wissen wir, daß sogar $y \le 16\frac{1}{5}$ gelten muß. Also setzen wir auf ein neues Gleichung (9) ein: Wir haben also jetzt:

$$
\begin{aligned}
y &\le 16 \\
\frac{900 - 9\frac{1}{2}z}{7} &\le 16 \\
900 - 9\frac{1}{2}z &\le 16 \cdot 7 \\
900 &\le 16 \cdot 7 + 9\frac{1}{2}z \\
900 - 16 \cdot 7 &\le 9\frac{1}{2}z \\
(900 - 16 \cdot 7) : 9\frac{1}{2} &\le z \\
82\frac{18}{19} &\le z
\end{aligned}
$$

Das hat uns also nichts gebracht. Gleichung (13) kann auch wieder in die nun schärfere Bedingung eingesetzt werden:

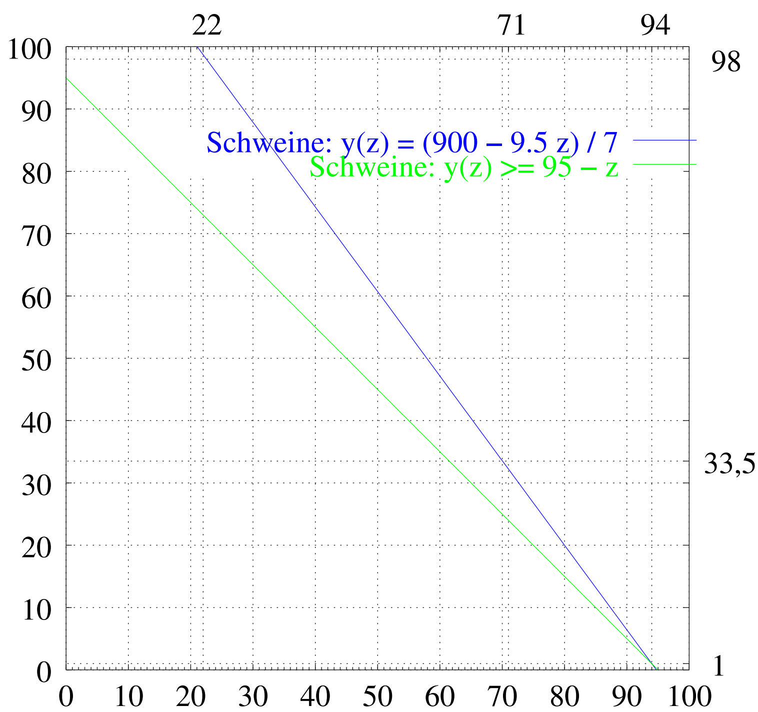
$$
\begin{aligned}
x &\le 5 \\
\frac{-200 + 2\frac{1}{2}z}{7} &\le 5 \\
-200 + 2\frac{1}{2}z &\le 5 \cdot 7
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}z &\leq 5 \cdot 7 + 200 \\ z &\leq (5 \cdot 7 + 200) : 2\frac{1}{2} \\ z &\leq 94 \end{aligned}$$

Auch dies hat nichts gebracht. Wir können aber jetzt unsere Abschätzung (20) für x auch mal versuchen in die Gleichung (1) $x+y+z = 100$ einzusetzen. Wenn $x \leq 5$ ist, dann muß also ebenfalls $100 - x - y \leq 5$ sein. Also:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 5 \geq x &= 100 - y - z \\ 5 &\geq 100 - y - z \\ 5 + y + z &\geq 100 \\ y + z &\geq 100 - 5 \\ y + z &\geq 95 \\ y &\geq 95 - z \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt dies nochmal in die Grafik mit eintragen erhalten wir:



Leider hat auch dies nichts gebracht.

Daher müssen wir jetzt einfach ausprobieren. Für x kommen nur noch die Werte zwischen 1 und 5 in Frage. z kann dann mit Hilfe von Gleichung (19) aus x berechnet werden und y kann dann aus Gleichung (12) berechnet werden.

$$
\begin{array}{lll}
x; & y = 100 - x - z; & z = \dfrac{14x + 400}{5} \\[2ex]
x = 1; & y = \dfrac{81}{5}; & z = \dfrac{414}{5} \\[2ex]
x = 2; & y = \dfrac{62}{5}; & z = \dfrac{428}{5} \\[2ex]
x = 3; & y = \dfrac{43}{5}; & z = \dfrac{442}{5} \\[2ex]
x = 4; & y = \dfrac{24}{5}; & z = \dfrac{456}{5} \\[2ex]
x = 5; & y = 1; & z = 94
\end{array}
$$

Also nur für $x = 5$ ergeben sich die anderen Werte ebenfalls als ganzzahlig. Der Weihnachtsmann muß also 5 Kühe, 1 Schwein und 94 Esel mitnehmen.

Möglichkeit 2 (Zahlentheorie - Diophantische Gleichung)
Auflösen der Gleichung (1) nach z liefert:

$$z = 100 - x - y \tag{21}$$

Dies in die Gleichung (3) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
10x + 3y + \frac{1}{2}z &= 100 \\
10x + 3y + \frac{1}{2} \cdot (100 - x - y) &= 100 \\
10x + 3y + 50 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y &= 100 \\
9\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y + 50 &= 100 \\
9\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y &= 50 \\
19x + 5y &= 100 \qquad (22)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung (22) bezeichnet man in der Zahlentheorie auch als Diophantische Gleichung.
Nun bestimmt man als erstes den größten, gemeinsamen Teiler ggT der beiden Vorfaktoren 19 und 5 mittels dem sogenannten Euklidischen Algorithmus. Als erstes schaut man wie oft die 5 in die 19 hinein passt und schreibt dies zusammen mit dem Rest der Division wie folgt auf:

$$19 = 3 \cdot 5 + 4 \tag{23}$$

Dann teilt man auf die selbe Art und Weise die 5 durch den Rest 4:

$$5 = 1 \cdot 4 + 1 \tag{24}$$

Nun nochmal die 4 durch 1:

$$4 = 4 \cdot 1$$

Da dies nun ohne Rest aufgeht, kann man den ggT ablesen:

$$\mathrm{ggT}(19; 5) = 1$$

Weiterhin kann man aus den obigen Rechnungen eine schöne Darstellung für den ggT basteln:

$$\mathrm{ggT}(19; 5) = 1 \overset{\text{aus Gleichung (24)}}{=} 5 - (1 \cdot 4) = 5 - 4 =$$

$$\overset{\text{aus Gleichung (23)}}{=} 5 - (19 - 3 \cdot 5) = 4 \cdot 5 - 1 \cdot 19$$

Also, etwas anders geschrieben – vergleiche auch Gleichung (22):

$$(25) \quad 19 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \quad = \quad 1$$

Wenn man jetzt noch irgendeine Unbekannte k einführt kann man die Gleichung (25) noch allgemeiner machen:

$$(26) \quad 19 \cdot (-1 + 5k) + 5 \cdot (4 - 19k) = 1$$

Beachte dabei, daß nichts verändert wurde, da vorne etwas dazu getan wurde, was hinten wieder weggenommen wird. Multiplikation mit 100 führt dann zu:

$$(27) \quad 19 \cdot (-100 + 500k) + 5 \cdot (400 - 1900k) \quad = \quad 100$$

Der Vergleich von Gleichung (27) mit Gleichung (22) ermöglicht folgende Darstellungen von x und y:

$$(28) \quad \begin{aligned} x &= -100 + 500k \\ y &= 400 - 1900k \end{aligned}$$

Leider findet man auch mit dieser mathematischen Methode nicht die Lösung. Man muß also auch hierbei Einschränkungen ausnutzen und letztlich ausprobieren. Damit nicht alle Rechnungen nochmal durchgeführt werden müssen, übernehme ich an dieser Stelle die Ergebnisse für die Einschränkungen aus der Gleichung (20) und den folgenden:

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 5 \\ 1 &\leq y \leq 16 \\ 83 &\leq z \leq 94 \end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung (28) noch nach k aufgelöst werden und für die möglichen Werte von x dieses k bestimmt werden. y kann dann aus k berechnet werden.

$$\begin{array}{lll} x; & k = \dfrac{x+100}{500} & y = 400 - 1900k \\[2ex] x = 1; & k = \dfrac{101}{500} & y = \dfrac{81}{5} \\[2ex] x = 2; & k = \dfrac{51}{250} & y = \dfrac{62}{5} \end{array}$$

$$x = 3; \qquad k = \frac{103}{500} \qquad y = \frac{43}{5}$$

$$x = 4; \qquad k = \frac{26}{125} \qquad y = \frac{24}{5}$$

$$x = 5; \qquad k = \frac{21}{100} \qquad y = 1$$

Also nur für $x = 5$ ergibt sich ein ganzzahliges y. Dazu kann z nach Gleichung (21) bestimmt werden:

$$z = 100 - x - y = 100 - 5 - 1 = 94$$

Der Weihnachtsmann muß also 5 Kühe, 1 Schwein und 94 Esel mitnehmen.